Método da Alteração

- Muitas vezes, uma construção aleatória não nos dá diretamente o objeto que procuramos encontrar. Contudo, podemos partir de uma construção aleatória e mostrar que com probabilidade positiva, tal construção possui uma propriedade satisfatória. Na sequência, podemos tomar tal objeto e alterá-lo um pouco a fim de obter o objeto desejado.

Ex:

- Queremos mostrar que $\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}$
- Imagine que sejamos capazes de mostrar que existe um conj. $A \subseteq V(G)$ tal que
  - $|A|$ é razoavelmente grande; e
  - $e(G[A]) \leq y$, onde y é um valor pequeno
- Note que A ñ é um conj. independente, que é o objeto que estamos procurando. Não conseguimos dizer que $e(G[A])=0$, mas pelo menos conseguimos dizer que y é pequeno.
- Agora seja $A' \subseteq A$ o conj. construído iterativamente da seguinte forma:
  - inicialment $A' = A$
  - Se $uv \in E(G)$ e $u, v \in A'$, faça $A' = A' \setminus \{v\}$

    → Repita esse passo até A' ser conj independente
- Se conseguirmos mostrar que $|A'| \geq \frac{n}{2d}$, temos o nosso resultado

  → Para isso será fundamental que y seja pequeno e A razoavelmente grande!

Teorema 4.31 Se G é um grafo com n vértices e grau médio d, então

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}.$$

Demo.

- Seja $p \in (0,1)$
- Seja $A \subseteq V(G)$ um conj. de vértices escolhido aleatoriamente ao acaso, onde cada vértice do grafo pertence a A com probabilidade p
- Para cada $u \in V(G)$, seja X_u a variável indicadora do evento $u \in A$. Assim

$$\mathbb{E}[X_u] = p$$

- Note que $|A| = \sum_{u \in V(G)} X_u$
- Assim, $\mathbb{E}[|A|] = \mathbb{E}\left[\sum_{u \in V(G)} X_u\right] = \sum_{u \in V(G)} \mathbb{E}[X_u] = np$
- Dada uma aresta $uv \in E(G)$, temos que

$$\mathbb{P}(uv \in E(G[A])) = \mathbb{P}(u \in A) \cdot \mathbb{P}(v \in A) = p^2$$

- Para cada $uv \in E(G)$, seja Y_{uv} uma variável aleatória indicadora do evento $uv \in E(G[A])$.
- Note que $e(G[A]) = \sum_{uv \in E(G)} Y_{uv}$
- Assim, $\mathbb{E}[e(G[A])] = p^2 e(G) = p^2 \cdot \dfrac{\sum_{u \in V(G)} d(u)}{2} \cdot \dfrac{n}{n}$

$$= p^2 \cdot \frac{d \cdot n}{2}$$

- Note que nada nos garante que A seja um conj. independente. Agora vamos alterar o conj. A, obtendo um conj. $A' \subseteq A$ tal que A' seja independente. Inicialmente $A' = A$. Enquanto houver uma aresta $uv \in E(G[A'])$, escolha um vértice de uv, digamos u, e remova u de A'. Claramente o conj. final obtido A' é independente e

$$\alpha(G) \geq |A'|$$

- Agora, vamos mostrar que $|A'| \geq \frac{n}{2d}$

- Primeiro, note que $|A'| \geq |A| - e(G[A])$ (A). Ademais

$$\mathbb{E}[|A| - e(G[A])] = \mathbb{E}[|A|] - \mathbb{E}[e(G[A])]$$

$$= np - p^2 \cdot \frac{dn}{2}$$

$$= \frac{2np - p^2 dn}{2} = \frac{np(2 - pd)}{2} \quad \text{(B)}$$

$$= np\left(1 - \frac{pd}{2}\right)$$

- Seja $p = \frac{1}{d}$.
- Assim

$$np\left(1 - \frac{pd}{2}\right) = n\frac{1}{d}\left(1 - \frac{\frac{1}{d}\cdot d}{2}\right) = n\frac{1}{d}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2d}$$

- Por (A) e (B), temos que $|A'| \geq \frac{n}{2d}$ $\square$

Lema A. Dado um $\ell \geq 3$, seja X uma variável aleatória que denota o número de ciclos de comprimento ℓ em $G(n,p)$. Então

$$\mathbb{E}[X] \leq n^{\ell} p^{\ell}.$$

Demonstração

- Seja $C = \{C_1, C_2, \dots, C_q\}$ o conj. de todos os ciclos de comprimento ℓ do K_n
- Para cada $i = 1, \dots, q$, seja X_i a variável indicadora que assume o valor 1 se $C \subseteq G \in G(n,p)$; e 0, caso contrário.
- Note que $\mathbb{E}[X_i] = p^{\ell}$ e que $X = \sum_{i=1}^{q} X_i$
- Note tbm que ao percorrer os vértices de um ciclo C_i obtemos uma permutação de ℓ vértices de G.
- Note que há $n(n-1)(n-2)\cdots(n-\ell+1)$ permutações com ℓ vertices de G e que cada permutação pode ser vista como um ciclo de C.

  Ademais, note que um ciclo de C pode ser representado por mais de uma permutação. Assim,

$$q \leq n(n-1)(n-2)\cdots(n-\ell+1) \leq n^{\ell}$$

- Portanto

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{q} X_i\right] = \sum_{i=1}^{q} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{q} p^{\ell} = q p^{\ell} \leq n^{\ell} p^{\ell}$$

$\square$

Proposição 5.5.3 (Desigualdade de Markov) Se X é uma variável aleatória $\bar{n}$ negativa e $\lambda > 0$, então

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\lambda}.$$

Demonstração

- Seja $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq \lambda\}$
- Note que $\mathbb{P}(X \geq \lambda) = \mathbb{P}(A)$
- Temos que

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) \geq \sum_{\omega \in A} \lambda \mathbb{P}(\omega) = \lambda \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(A) = \lambda \mathbb{P}(A) = \lambda \mathbb{P}(X \geq \lambda)$$

$\square$

- A <u>cintura</u> de um grafo G, denotada por $g(G)$, é o comprimento do menor ciclo em G.

Teorema 4.42 (Erdős) Para todo $k \in \mathbb{N}$, existe um grafo G com

$$\chi(G) \geq k \quad e \quad g(G) \geq k.$$

Demonstração

- Fixe $k \in \mathbb{N}$ e considere o grafo aleatório $G(n, p)$ com $p = n^{-1+\varepsilon}$, onde $\varepsilon = 1/k$.
- Para $i = 3, \dots, k-1$, seja X_i o número de ciclos de comprimento i em $G(n, p)$.
- Seja $X = \sum_{i=3}^{k-1} X_i$ e note que X é o número de ciclos com comprimento menor que k.

- AF1: $\mathbb{E}[X] < k\, n^{\varepsilon(k-1)}$

Demo.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=3}^{k-1} \mathbb{E}[X_i] \leq \sum_{i=3}^{k-1} n^i p^i = \sum_{i=3}^{k-1} n^i \left(\frac{n^{\varepsilon}}{n}\right)^i = \sum_{i=3}^{k-1} n^{\varepsilon i} \leq \sum_{i=3}^{k-1} n^{(k-1)\varepsilon}$$

$$< k\, n^{(k-1)\varepsilon}$$ $\diamond$

AF2: $\mathbb{P}(X \geq n/2) \to 0$ qndo $n \to \infty$

Demo.

- Pela desigualdade de Markov

$$P\left(X \geq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{2}{n} \mathbb{E}[X]$$

- Assim,

$$\mathbb{P}\left(X \geq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{2}{n} \mathbb{E}[X]$$
$$< \frac{2}{n} k\, n^{(k-1)\varepsilon}$$
$$= \frac{2}{n} k\, n^{(k-1)1/k}$$
$$= 2/n\; k\, n^{1-1/k}$$
$$= \frac{2k}{n^{1/k}}$$

- Note que $\frac{2k}{n^{1/k}} \to 0$ qndo $n \to \infty$ $\diamond$

- Assim, com alta probabilidade, temos que o $G(n,p)$ contém no máximo $\frac{n}{2}$ ciclos de tamanho menor que k, pois $\mathbb{P}(X < \frac{n}{2}) = 1 - \mathbb{P}(X \geq \frac{n}{2}) \to 1$ qndo $n \to \infty$.

- Provamos anteriormente que, com alta probabilidade,

$$\alpha(G(n,p)) < 2\frac{\log n}{p} = \frac{2 \log n}{n^{-1+\varepsilon}} = 2n^{1-\varepsilon} \log n$$

AF3: Existe um grafo $G' \in G(n,p)$ t.q. $\chi(G') < \frac{n}{2}$ e $\alpha(G') < 2n^{1-\varepsilon} \log n$

Demo.

- Note que $\mathbb{P}(\chi \geq \frac{n}{2}) \to 0$ e $\mathbb{P}(\alpha(G) \geq 2n^{1-\varepsilon} \log n) \to 0$ qndo $n \to \infty$.
- Note tbm que

$$\mathbb{P}(\chi \geq \tfrac{n}{2} \cup \alpha(G) \geq 2n^{1-\varepsilon} \log n)$$
$$\leq \mathbb{P}(\chi \geq \tfrac{n}{2}) + \mathbb{P}(\alpha(G) \geq 2n^{1-\varepsilon} \log n) \to 0$$

qndo $n \to \infty$

- Por fim, note

$$\overline{\chi \geq \tfrac{n}{2} \cup \alpha(G) \geq 2n^{1-\varepsilon} \log n} = \overline{\chi \geq \tfrac{n}{2}} \cap \overline{\alpha(G) \geq 2n^{1-\varepsilon} \log n}$$
$$= \chi < \tfrac{n}{2} \cap \alpha(G) < 2n^{1-\varepsilon} \log n$$

- Portanto

$$\mathbb{P}(\chi < \tfrac{n}{2} \cap \alpha(G) < 2n^{1-\varepsilon} \log n) = 1 - \mathbb{P}(\chi \geq \tfrac{n}{2} \cup \alpha(G) \geq 2n^{1-\varepsilon} \log n)$$
$$\to 1 \quad \text{qndo } n \to \infty$$

$\diamond$

- Removendo no máximo $\frac{n}{2}$ vértices de G', obtemos um grafo G tal que $v(G) \geq n/2$, $g(G) \geq k$ e

$$\alpha(G) \leq \alpha(G') < 2n^{1-\varepsilon} \log n$$

- Pelo Lema 2.4.3

$$\chi(G) \geq \frac{v(G)}{\alpha(G)} \geq \frac{n/2}{2n^{1-\varepsilon}\log n} = \frac{n^{\varepsilon}}{4\log n} \longrightarrow \infty$$

qndo $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\varepsilon}}{4\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon n}{4\cdot 1/n} = \lim_{n\to\infty} 4\varepsilon n^2 = \infty$$

Assim, tomando n suficientemente grande, temos que $\chi(G) \geq k$

$\square$